Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, II Università degli Studi di Roma, facoltà di Ingegneria

Compito di Analisi III per Ingegneria Online (Gestionale e Informatica) 07–01–06; Soluzioni

Esercizio 1. Il rotore della forma differenziale è il vettore $(x^2-y^2)\underline{k}$. Applichiamo la formula $\int\int_S d\sigma(\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}^e)$ dove S è la porzione di spazio interna alla curva definita da $z = 2x^2 + \frac{1}{2}y^2$ $z = 2x + y + 1$ che, dopo brevi calcoli, si scopre essere l'ellisse $(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$. $\underline{n}^e = (-2, -1, 1)\frac{1}{\sqrt{6}}$ (è la normale che punta verso l'alto). L'integrale diventa quindi $\int\int_{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{(y-1)^2}{4}\leq 1} dxdy\sqrt{6}(x^2 - y^2)\frac{1}{\sqrt{6}}$. Introduciamo coordinate polari ellittiche $x = \frac{1}{2} + \rho\cos\varphi$, $y = 1+2\rho\sin\varphi$ e otteniamo $\int_0^1 d\rho(2\rho)\int_0^{2\pi} d\varphi(\frac{1}{4} - 1 + \rho^2\cos^2\varphi - 4\rho^2\sin^2\varphi)$ (gli altri due termini non danno contributo essendo lineari in $\cos\varphi$ e $\sin\varphi$.) Alla fine -3π è il risultato. Naturalmente si poteva eseguire l'integrale curvilineo ma le primitive da trovare sono più complicate. In ogni caso valeva la pena osservare che la forma $yzdx + xzdy + xydz$ è esatta). Nessuno ha dato la risposta giusta. Un solo studente ha provato a rispondere.

Esercizio 2. È un esercizio standard di integrale doppio la cui impostazione dà $\int_0^1 dx\int_{\frac{x^2}{8}}^1 2xy^2 + \int_1^2 dx\int_{\frac{x^2}{8}}^{\frac{1}{x}} 2xy^2 = \frac{5}{8}$ che non compariva fra le posssibili risposte. Va notato che il primo integrale diventa l'integrale di una funzione dispari rispetto ad un intervallo simmetrico della variabile x e quindi è nullo senza dover trovare la primitiva. 5 studenti hanno risposto esattamente, 3 erroneamente.

Esercizio 3. Si possono seguire due strade.

Si usa il Teorema di Gauss. Sia $z = 1 - \frac{x^2}{4} - y^2$ il paraboloide e sia $S = \{\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, z = 0\}$ e sia $V = \{z \leq 1 - \frac{x^2}{4} - y^2, z \geq 0\}$. Sia inoltre $\underline{F}(\underline{x}) = y^2x\underline{i} + \underline{j} + xz\underline{k}$, il campo vettoriale con $div\underline{F}(\underline{x}) = y^2 + x$. Usando il teorema della divergenza, il risultato è $\int\int\int_V dxdydz(div\underline{F}(\underline{x})) - \int\int_S d\sigma(\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}_e(\underline{x}))$ dove $\underline{n}_e(\underline{x}) = (0, 0, -1)$. $\int\int_S d\sigma(\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}_e(\underline{x})) = 0$ in quanto è zero $(\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}_e(\underline{x}))$ (si ricordi che $z = 0$ su S.) Per calcolare l'integrale triplo introduciamo le coordinate $z = u$, $x = 2\sqrt{1-u}\rho\cos\varphi$, $x = 2\sqrt{1-u}\rho\sin\varphi$, la cui matrice iacobiana ha determinante in modulo $2u\rho(1-u)\sin^2\varphi$. L'integrale diventa $\int_0^1 du\int_0^1 d\rho\int_0^{2\pi} d\varphi 2(1-u)\rho(u\rho^2\sin^2\varphi + 2\sqrt{1-u}\rho\cos\varphi) = \frac{\pi}{6}$ e la risposta giusta è la R1. Nessun studente ha dato una qualsivoglia risposta.

La seconda strada consiste nell'eseguire l'integrale di superficie $\int\int_S d\sigma(\underline{F}(\underline{x}), \underline{n}_e(\underline{x}))$ dove stavolta S è la superficie laterale del paraboloide e $\underline{n}^e$ è la normale esterna *che dipende da* $\underline{x}$. È chiaro che si ottiene lo stesso risultato.

Esercizio 4. L'integrale da calcolare è $\int_{-1}^4(|x| + |x-3|)\sqrt{2} = \int_{-1}^0\sqrt{2}(-x - x + 3) + \int_0^3\sqrt{2}(x - x + 3) + \int_3^4\sqrt{2}(x + x - 3) = 17\sqrt{2}$. Tre studenti hanno risposto esattamente e quattro erroneamente.

Esercizio 5. f_1 non ammette limite nell'origine. Basta porsi sulla funzione $y = \sqrt{|x|}$ per ottenere $f_1(x, \sqrt{|x|}) = \frac{\sqrt{|x|}}{x}\sqrt{x^2 + |x|}$ e verificare che il limite non esiste.

$|f_2| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ per cui il limite è zero. $|f_3| \leq 2(|x|)^{1/2}$ (usare $|ab| \leq 2(a^2 + b^2)$)

La risposta giusta è quindi R6. quattro studenti hanno risposto bene e quattro male.

Esercizio 6. $f_x(0,0) = \lim \frac{1}{t}(f(t,0) - f(0,0)) = \lim \frac{1}{t}(0 - 0) = 0$, $f_y(0,0) = \lim \frac{1}{t}(f(0,t) - f(0,0)) =$

$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(0-0)=0$. La derivata direzionale di 45 gradi è $((v_1,v_2)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}))$ $\partial f_{\underline{v}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(tv_1,tv_2)-f(0,0))=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\sqrt{\frac{t^2}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{|t|}{t}\frac{1}{\sqrt{2}}$ non esiste. La risposta giusta era R6. Sette studenti hanno risposto male e uno bene.

Esercizio 7. Esercizio standard. La risposta giusta era la R3. Sette studenti hanno risposto bene e uno male.

Esercizio 8. Si applica il Lemma di Gauss–Green per cui $\frac{1}{2}\oint(xdy-ydx)$ dove $x=\sin(4\varphi)\cos\varphi$, $x=\sin(4\varphi)\sin\varphi$, con $0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{3}{4}\pi$, $\pi\le\varphi\le\frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{2}\pi\le\varphi\le\frac{7}{4}\pi$. Si ottiene $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2(4\varphi)+\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}\sin^2(4\varphi)+\frac{1}{2}\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\sin^2(4\varphi)+\frac{1}{2}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{7}{4}\pi}\sin^2(4\varphi)$. Cambiando variabile $t=4\varphi$ si ottiene $\frac{1}{8}\int_0^{\pi}\sin^2 t+\frac{1}{8}\int_{2\pi}^{3\pi}\sin^2 t+\frac{1}{8}\int_{4\pi}^{5\pi}\sin^2 t+\frac{1}{8}\int_{6\pi}^{7\pi}\sin^2 t$ e per periodicità si ha $\frac{1}{8}4\int_0^{\pi}\sin^2 t=\frac{\pi}{4}$ per cui R1 era la risposta giusta. Nessuno ha risposto bene

Esercizio 9. Esercizio standard. R6 era la risposta giusta. Sette studenti hanno risposto bene e uno non ha risposto.

Esercizio 10. Conveniva vedere la forma come somma di due forme: $\omega_1=\frac{-ydx}{x^2+y^2}+\frac{xdy}{x^2+y^2}$ e $\omega_2=\sqrt{x^2+y^2}(x+y)dz$. La curva su cui integrare è chiusa e si proietta sul piano (x,y) in una curva che circonda l'origine. Grazie al fatto che la forma ω_1 è *chiusa* si può dire che $\oint_{proiezione}\omega_1=2\pi$. La forma $\omega_2=dz\sqrt{z}(z-1)=d(\frac{2}{5}z^{5/2}-\frac{2}{3}z^{3/2})$ è quindi esatta e il suo integrale è nullo essendo la curva chiusa. Quattro studenti hanno risposto bene e quattro male.